5. A SZILÁRDSÁGTAN 2D FELADATAI

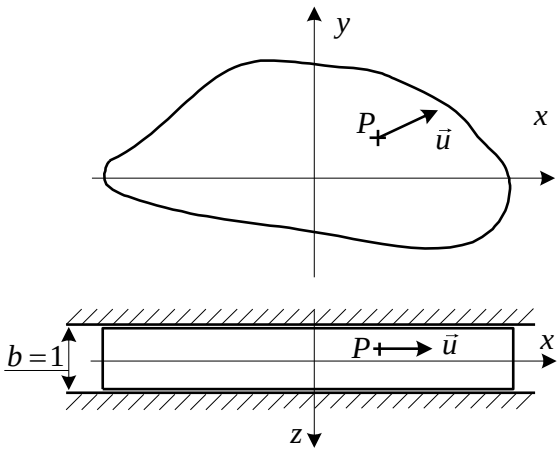
A szilárdságtan (rugalmasságtan) kétdimenziós, vagy kétméretű (2D) feladatai körébe három feladatcsoportot szokás sorolni:

- a sík alakváltozási feladatokat (SA),
- az általánosított síkfeszültségi állapot feladatait (ÁSF) és
- a forgásszimmetrikus, vagy tengelyszimmetrikus feladatokat (FSZ).

5.1. A feladatok értelmezése

5.1.1. A sík alakváltozási feladat (SA)

Definíció: sík alakváltozásról beszélünk, ha a vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága sem változik.



Az ábrán látható esetben az alakváltozás az x, y síkkal párhuzamos síkokban azonos. Az alakváltozás során az x, y-nal párhuzamos síkok távolsága nem változik. Ebben az esetben az egész test alakváltozása egy sík (pl. a $z=0$ sík) alakváltozásával jellemezhető.

Ilyen alakváltozás általában olyan testeknél fordul elő, ahol a b méret a test többi méretéhez képest nagy. Például vastag falú cső, alagút stb. Az ilyen szerkezetek *mechanikai modellje* a legnagyobb méretre merőleges egységnyi vastagságú metszet.

Az $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$ elmozdulásmező koordinátái: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $w \equiv 0$.

A tetszőleges P pont nem mozdul el z irányban és az x, y síkkal párhuzamos elmozdulásai nem függenek a pont z helykoordinátájától.

Az alakváltozási állapot:

$$\underset{xyz}{\left[\underline{\underline{A}}\right]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0.$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} \equiv 0, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \equiv 0.$$

A feszültségi állapot (az általános Hooke-törvényből): $\underset{xyz}{\left[\underline{\underline{F}}\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-2\nu}\nu\right), \qquad \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-2\nu}\nu\right), \qquad \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \qquad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Az alakváltozási és feszültségi állapot is három, egymástól független koordinátával jellemezhető és minden koordináta csak az x és y függvénye.

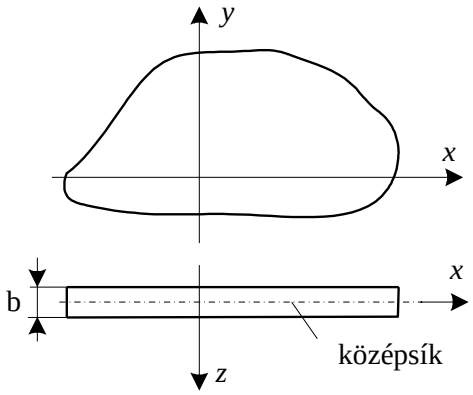
Az alakváltozási állapot független jellemzői: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$.

A feszültségi állapot független jellemzői: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

5.1.2. Általánosított sík-feszültségi feladat (ÁSF)

Elnevezés: általánosított sík-feszültségi feladat ≡ tárcsa feladat ≡ saját síkjában terhelt lemez feladata.

Tárcsa: olyan test, amelynek egyik mérete lényegesen kisebb, mint a másik kettő, értelmezhető középsík és a terhelés vastagság mentén vett eredője a középsíkba esik.

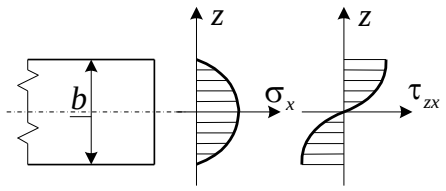


Kiinduló feltételezések:

- b << a test más jellemző méreteinél,
- $z = 0$ a középfelület, a középfelület sík,
- a külső terhelésben nincsenek z irányú erők, az x, y síkkal párhuzamos erők eredője az x, y síkba esik,
- a $z = \pm\frac{b}{2}$ felületek terheletlenek.

A feszültségekre vonatkozó feltételezések:

- A $z = \pm\frac{b}{2}$ felületek terheletlenek $\Rightarrow$ $\sigma_z\big|_{\pm\frac{b}{2}} = 0.$
- Ha b kicsi, akkor $\sigma_z = 0$ nemcsak a felületeken, hanem a többi helyen is.
- A $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ a z helykoordináta páros függvényei.
- A τ_{zx}, τ_{zy} a z helykoordináta páratlan függvényei.



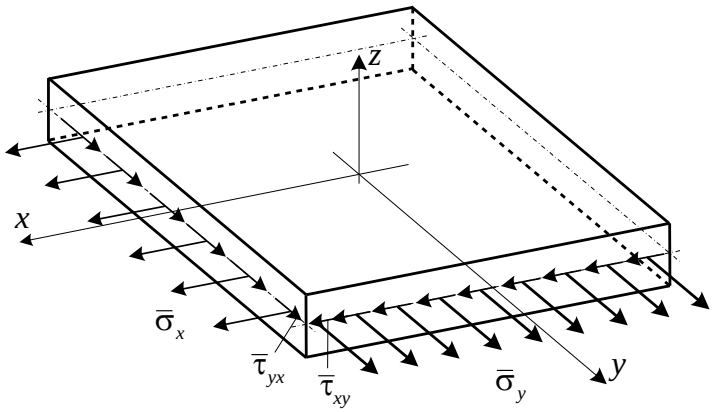
A vastagságra vonatkoztatott átlagos feszültségek bevezetése:

Átlagos feszültségi tenzor: $\left[\underset{xyz}{\overline{\underline{\underline{F}}}}\right] = \begin{bmatrix} \overline{\sigma}_x & \overline{\tau}_{yx} & 0 \\ \overline{\tau}_{xy} & \overline{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ahol

$$\overline{\sigma}_x = \frac{1}{b}\int_{(b)} \sigma_x dz, \qquad \overline{\sigma}_y = \frac{1}{b}\int_{(b)} \sigma_y dz, \qquad \overline{\sigma}_z = \frac{1}{b}\int_{(b)} \sigma_z dz = 0,$$

$$\overline{\tau}_{xy} = \frac{1}{b}\int_{(b)} \tau_{xy} dz, \qquad \overline{\tau}_{zx} = \frac{1}{b}\int_{(b)} \tau_{zx} dz = 0, \qquad \overline{\tau}_{zy} = \frac{1}{b}\int_{(b)} \tau_{zy} dz = 0.$$

Mechanikai modell: a testet (tárcsát) a középfelületével helyettesítjük és a mechanikai jellemzőket (a vastagság mentén képzett átlagértékeket) a középsíkhoz kötjük.



Anyagtörvény az átlagos mennyiségekre (általános Hooke-törvény):

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\bar{\varepsilon}_x + \nu\bar{\varepsilon}_y\right), \qquad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\bar{\varepsilon}_y + \nu\bar{\varepsilon}_x\right), \qquad \sigma_z = 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y\right),$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \qquad \bar{\tau}_{xz} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{xz} = 0, \qquad \bar{\tau}_{xz} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{xz} = 0.$$

Olyan általános alakváltozásai jellemzőket kapunk, amelyek szintén csak az x, y helykoordináták függvényei:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{b}\int_{(b)} \varepsilon_x dz, \qquad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{b}\int_{(b)} \varepsilon_y dz, \qquad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b}\int_{(b)} \gamma_{xy} dz.$$

Átlagos alakváltozási jellemzők: $\left[\underset{xyz}{\bar{\underline{\underline{A}}}}\right] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yx} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}.$

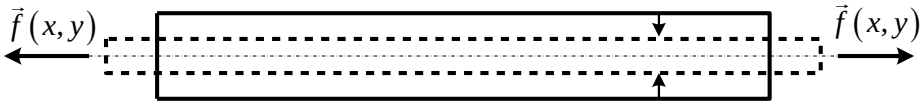
Átlagos elmozdulások (a középsík pontjainak elmozdulásai): $\bar{\vec{u}}(x,y) = \bar{u}(x,y)\vec{e}_x + \bar{v}(x,y)\vec{e}_y$.

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \qquad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \qquad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x},$$

$$\bar{u} = \frac{1}{b}\int_{(b)} u dz, \qquad \bar{v} = \frac{1}{b}\int_{(b)} v dz, \qquad \bar{w} = \frac{1}{b}\int_{(b)} w dz \equiv 0,$$

$$\bar{w} \equiv 0, \text{ de } w(x,y,z) \neq 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon_z \neq 0 \;\Rightarrow\; \bar{\varepsilon}_z \neq 0.$$

Például:



A feszültségi és alakváltozási állapot itt is három, egymástól független koordinátával jellemezhető, amelyek csak x, y függvényei.

Az alakváltozási állapot független jellemzői: $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$.

A feszültségi állapot független jellemzői: $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$.

5.1.3. Forgásszimmetrikus feladat (FSZ)

Elnevezés: forgásszimmetrikus feladat ≡ tengelyszimmetrikus feladat.

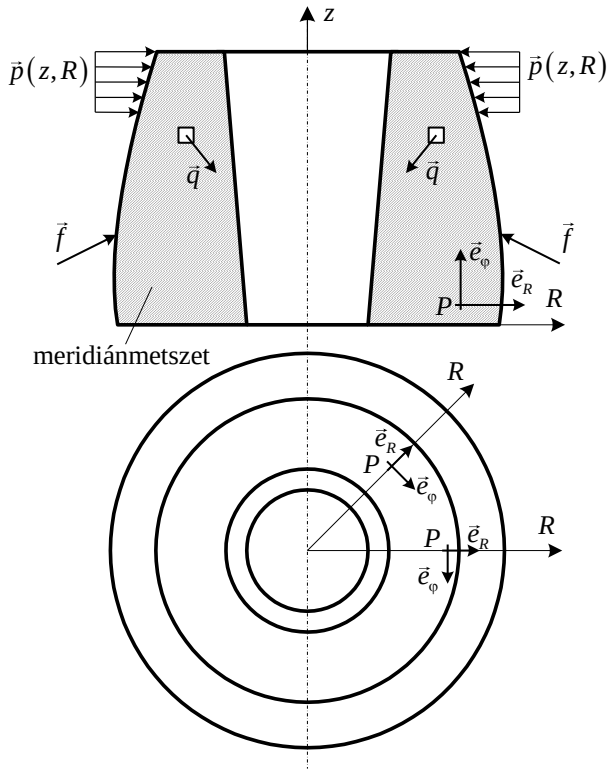
Definíció: forgásszimmetrikus, vagy más szóval tengelyszimmetrikus geometriájú és terhelésű testek feladata.

A forgásszimmetrikus alakú alkatrészek a gépészetben gyakran előfordulnak (pl.: esztergálás).
Az ábrán $\vec{q}$ a térfogati terhelés sűrűségvektora, $\vec{p}$ a felületi terhelés sűrűségvektora és $\vec{f}$ a vonalmenti terhelés sűrűségvektora.

A definícióból következően sem a test geometriája (alakja), sem a test terhelése nem függ a φ koordinátától. $\Rightarrow$ A mechanikai mennyiségek nem függenek a φ koordinátától.

Koordináta rendszer: R, z, φ (HKR – görbevonalú koordináta-rendszer!)

Elmozdulásmező: $\vec{u} = u\vec{e}_R + v\vec{e}_z$, $u = u(R,z)$, $v = v(R,z)$, $w \equiv 0$.
A test pontjai a meridián síkban mozdulnak el.



Alakváltozási állapot, alakváltozási tenzor: $\underset{Rz\varphi}{\left[\underline{\underline{A}}\right]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{zR} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}$,

$$\varepsilon_R = \frac{\partial u}{\partial R}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{2(R+u)\pi - 2R\pi}{2R\pi} = \frac{u}{R}, \qquad \gamma_{Rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R}, \qquad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{R\varphi} = 0.$$

Feszültségi állapot (általános Hooke törvényből): $\underset{Rz\varphi}{\left[\underline{\underline{F}}\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{zR} & 0 \\ \tau_{Rz} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix}$,

$$\sigma_R = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_R + \frac{\varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi}{1-2\nu}\nu\right), \qquad \sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi}{1-2\nu}\nu\right), \qquad \sigma_\varphi = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_\varphi + \frac{\varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi}{1-2\nu}\nu\right),$$

$$\tau_{Rz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{Rz}, \qquad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0.$$

Az alakváltozási és a feszültségi állapot négy-négy, egymástól független koordinátával jellemezhető.
Az alakváltozási állapot független jellemzői: $\varepsilon_R, \varepsilon_z, \varepsilon_\varphi, \gamma_{Rz}$.

A feszültségi állapot független jellemzői: $\sigma_R, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{Rz}$.

5.1.4. A 2D feladatok közös jellemzői

- Mindhárom feladatban minden mechanikai mennyiség két helykoordinátától függ.
- Mindhárom feladatban két egymástól független elmozdulásmező van:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(x,y) \\ \bar{v} &= \bar{v}(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u &= u(R,z) \\ v &= v(R,z) \end{aligned}\right\}$$

SA ÁSF FSZ

- Két független skaláris elmozdulásmezőből a test minden mechanikai jellemzője (alakváltozási és feszültségi állapot) előállítható.

5.1.5. A 2D feladatok különbözőségei

- A vizsgált testekben feladattípustól függően más és más mechanikai (alakváltozási, feszültségi) állapot alakul ki.
- Az általános Hooke törvényből feladattól függően különböző anyagegyenletek adódnak.

5.2. Az izoparametrikus közelítés (interpoláció)

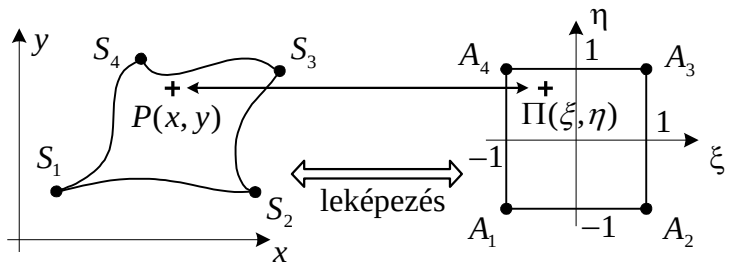
Definíció: izoparametrikusnak azokat a közelítéseket nevezzük, amelyeknél az elem geometriájának (alakjának) leírására és az elemen belül az elmozdulásmező közelítésére ugyanazokat a függvényeket használjuk.

Az elem geometriájának leírása/megadása - izoparametrikus leképezés.

Egy görbékkel határolt négyoldalú síktartományt egy két egységnyi oldalhosszúságú négyzetre képezünk le. Az egyik tartomány minden P pontjához kölcsönösen egyértelműen hozzárendeljük a másik tartomány minden Π pontját.

$$P(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \Pi(\xi,\eta).$$

A hozzárendelésnek oda-vissza működnie kell.



Leképezés:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta) \\ y &= y(\xi,\eta) \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta) x_i \\ y(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta) y_i \end{aligned}\right\}.$$

m - a tartomány határát megadó S_i pontok (csomópontok) száma,

x_i, y_i - az S_i pont helykoordinátái,

$h_i(\xi,\eta)$ - az alakfüggvények, közelítő függvények.

Az alakfüggvények előállítása:

Követelmény: a leképezést megadó függvénykapcsolatnak az $S_i \leftrightarrow A_i$ pontokra is működnie kell.

Ezért: $$h_i\left(\xi_j,\eta_j\right)=\begin{cases}1, \text{ ha } i=j,\\ 0, \text{ ha } i\neq j.\end{cases}$$

Ebből a tulajdonságból kiindulva az alakfüggvények merghatározhatók.

A leképezés megfordíthatósága, deriválások:

Legyen: $\left.\begin{cases} f\left(x,y\right)\\ x\left(\xi,\eta\right)\\ y\left(\xi,\eta\right)\end{cases}\right\}$ adott $\left(\text{ismert}\right)$ függvény.

Állítsuk elő az f függvény $\xi,\eta,$ illetve x,y szerineti parciális deriváltjait:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial f}{\partial \eta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial \xi}\\ \frac{\partial f}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{J}}\left(\xi,\eta\right)\\ \textit{Jacobi}\text{-féle}\\ \text{függvény mátrix}}}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}.$$

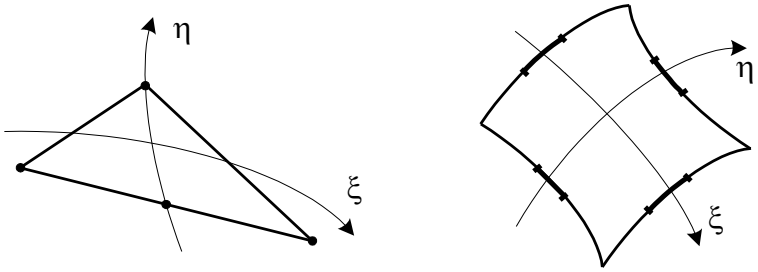
A leképezés kölcsönösen egyértelmű (megfordítható, vagyis oda-vissza működik), ha $\underline{\underline{J}}\left(\xi,\eta\right)$ invertálható.

Az invertálhatóság feltétele: $\det\left|\underline{\underline{J}}\left(\xi,\eta\right)\right|\neq 0.$

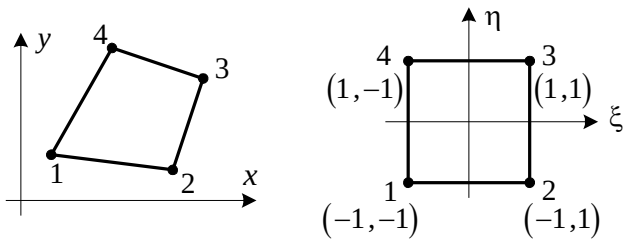
Az inverz *Jacobi*[1] mátrix (a numerikus előállításhoz szükséges alakban):

$$\underline{\underline{J}}^{-1}=\frac{1}{\det\left|\underline{\underline{J}}\left(\xi,\eta\right)\right|}\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi}\\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\end{bmatrix}.$$

Az elem *nem elfajuló* (a leképezés kölcsönösen egyértelmű), ha:
- a tartomány alakja konvex (még az ábra bal oldalán látható határeset is megengedett),
- kvadratikus (másodfokú) elemnél a páros sorszámú pontok az oldal középső harmadába esnek.



a) Négy csomópontú (lineáris) négyszögelem.

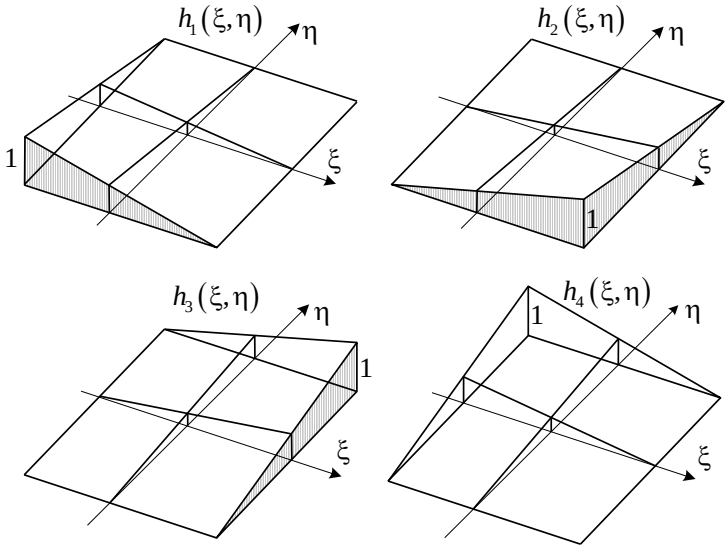


Alakfüggvények / Approximációs függvények:
(Minden alakfüggvény tartalmaz egy másodfokú tagot is.)

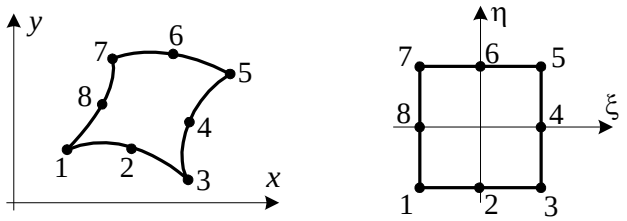
[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) német matematikus.

$$h_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad h_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$h_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad h_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$



b) Nyolc csomópontú (négyzetes/kvadratikus) négyszögelem.



Alakfüggvények/Approximációs függvények:

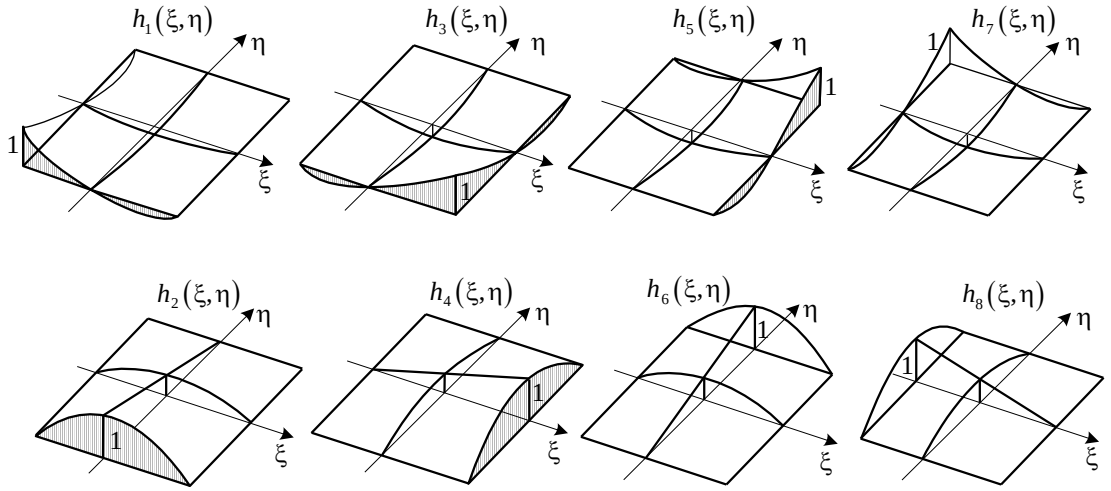
(Minden alakfüggvény tartalmaz legalább egy harmadfokú tagot.)

$$h_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \qquad h_2(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta),$$

$$h_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \qquad h_4(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1+\xi)\left(1-\eta^2\right),$$

$$h_5(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \qquad h_6(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta),$$

$$h_7(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \qquad h_8(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1-\xi)\left(1-\eta^2\right).$$



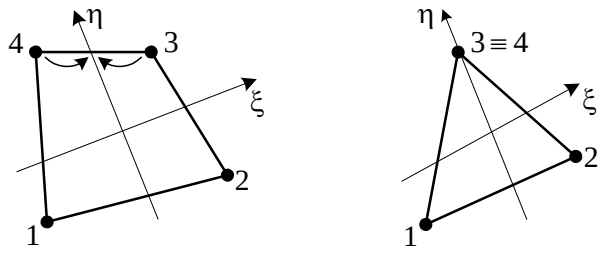
c) Háromszög alakú elemek előállítása négyszögelemekből degenerációval

Előfordulhat, hogy a vizsgált test (tartomány) nem fedhető le jól négyszögelemekkel. Szükség lehet háromszög alakú elemek alkalmazására.

Degeneráció: a négyszögelem sarokpontjainak egybeejtésével (egy oldal hosszának nullára zsugorításával) háromszög elemet állítunk elő.

Következmény: módosulni fognak az alakfüggvények.

- *Három csomópontú (lineáris) háromszögelem*



Leképezés:

$$x(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_3+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_4,$$

$$y(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_3+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_4.$$

Degeneráció: $x_3=x_4, \quad y_3=y_4.$

$$x(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2+\frac{1}{2}(1+\eta)x_3,$$

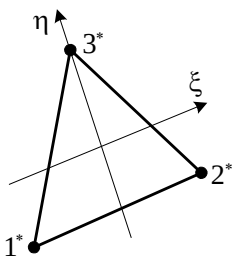
$$y(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2+\frac{1}{2}(1+\eta)y_3.$$

A degenerációval előállított lineáris háromszögelem alakfüggvényei:

$$h_1^*(\xi,\eta)=h_1(\xi,\eta),$$

$$h_2^*(\xi,\eta)=h_2(\xi,\eta),$$

$$h_3^*(\xi,\eta)=h_3(\xi,\eta)+h_4(\xi,\eta).$$



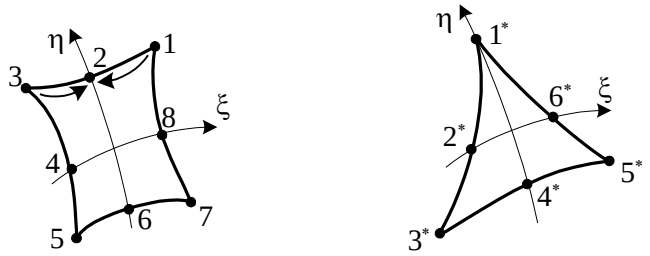
- *Hat csomópontú (kvadratikus) háromszögelem*

A kvadratikus négyszögelem alakfüggvényei:

$$h_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1), \qquad i=1,3,5,7,$$

$$h_i(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\left[1-(\xi\eta_i)^2-(\xi\eta_i)^2\right], \quad i=2,4,6,8.$$

Degeneráció: $\left.\begin{array}{l} x_1=x_2=x_3 \\ y_1=y_2=y_3 \end{array}\right\}.$



A degenerációval előállított kvadratikus háromszög alakú elem alakfüggvényei:

$$h_1^*(\xi,\eta)=h_1(\xi,\eta)+h_2(\xi,\eta)+h_3(\xi,\eta), \qquad h_2^*(\xi,\eta)=h_4(\xi,\eta),$$

$$h_3^*(\xi,\eta)=h_5(\xi,\eta)+\Delta h(\xi,\eta), \qquad h_4^*(\xi,\eta)=h_6(\xi,\eta)-2\Delta h(\xi,\eta),$$

$$h_5^*(\xi,\eta)=h_7(\xi,\eta)+\Delta h(\xi,\eta), \qquad h_6^*(\xi,\eta)=h_8(\xi,\eta),$$

ahol $\Delta h(\xi,\eta)=\frac{1}{8}\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)$.

Az elmozdulásmező izotrópiájának biztosításához (ahhoz, hogy a sorszámozást tetszőleges sarokpontban elkezdhessük) van szükség a $3^*, 4^*, 5^*$ pontokban az alakfüggvények korrekciójára.

5.3. Interpolációs eljárások

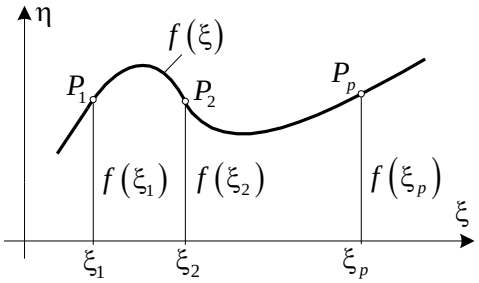
Interpoláció: adott (diszkrét) pontokban vett függvényértékekre (és deriváltakra) illeszkedő függvény felírása, amelynek segítségével az adott pontok közötti függvényértékeket lehet megbecsülni.

A leggyakrabban alkalmazott interpolációs eljárásokat tekintjük át.

5.3.1. A Lagrange-féle interpoláció

Ismerjük az $f(\xi)$ függvény helyettesítési értékeit a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ helyeken.

Egy olyan, az $f(\xi)$ függvényt közelítő $\eta(\xi)$ függvényt akarunk felírni, amely átmegy az $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ... $f(\xi_p)$ függvényértékekkel megadott pontokon.



A közelítő függvény: $\eta(\xi)=\sum_{j=1}^{p} L_j(\xi) f(\xi_j)$.

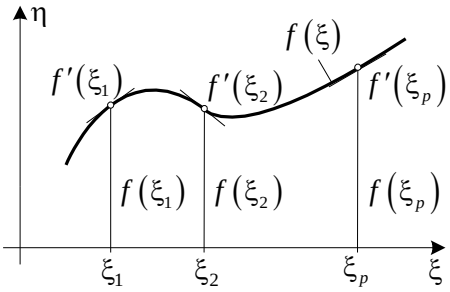
p - azoknak a pontoknak a száma, ahol a függvényértékek rendelkezésre állnak.

A *Lagrange*-féle interpolációs polinomok általános alakja:

$$L_j(\xi)=\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\ldots(\xi-\xi_{j-1})(\xi-\xi_{j+1})\ldots(\xi-\xi_p)}{(\xi_j-\xi_1)(\xi_j-\xi_2)\ldots(\xi_j-\xi_{j-1})(\xi_j-\xi_{j+1})\ldots(\xi_j-\xi_p)}.$$

5.3.2. Az Hermite-féle interpoláció

Az *Hermite*[2]-féle (ermit) interpolációnál ismerjük az $f(\xi)$ függvény és az $f(\xi)$ függvény $f'(\xi)$ első deriváltjának helyettesítési értékeit a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ helyeken.



Egy olyan, az $f(\xi)$ függvényt közelítő $\eta(\xi)$ függvényt akarunk felírni, amely átmegy az $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots f(\xi_p)$ függvényértékkel megadott pontokon és ezekben a pontokban $f'(\xi_1), f'(\xi_2), \ldots f'(\xi_p)$ a deriváltja.

A közelítő függvény: $\eta(\xi) = \sum_{j=1}^{p} H_{0j}(\xi) f(\xi_j) + \sum_{j=1}^{p} H_{1j}(\xi) f'(\xi_j).$

Az *Hermite*-féle interpolációs polinomok:

$$H_{0j}(\xi) = \left[1 - 2(\xi - \xi_j) L_j'(\xi_j)\right] L_j^2(\xi),$$
$$H_{1j}(\xi) = (\xi - \xi_j) L_j^2(\xi).$$

Megjegyzések:

- A rúdszerkezeteknél *Lagrange*- és *Hermite*-féle interpolációt alkalmaztunk.
- Az izoparametrikus közelítésnél kizárólag *Lagrange* interpolációt alkalmazunk.

5.4. A „hagyományos"és az izoparametrikus végeselemek összehasonlítása

A „hagyományos elemek" jellemzői:

- Az elemhatár egyenes vonal, vagy sík felület.
- Az integrálás elvégzésének megkönnyítésére elemhez köttött, helyi koordináta-rendszert (KR-t) veszünk fel.
- Az elmozdulásmezőt a helyi koordináta-rendszerben hatványsorral közelítjük- a hatványsor együtthatóinak nincs fizikai tartalma.
- Az együtthatókat kifejezzük a helyi koordináta-rendszerben vett csomóponti paraméterekkel (az elemek szintjén egyenletrendszert kell megoldani).
- Az elem merevségi mátrixát és a csomópont terhelésvektorát helyi koordináta-rendszerben állítjuk elő (az integrálás zárt alakban még helyi koordináta-rendszerben, egyenes/sík oldalak esetén sem egyszerű).
- Az elemek összekapcsolásához a merevségi mátrixokat és a csomóponti terhelésvektorokat egy globális koordináta-rendszerbe kell transzformálni.

Célkitűzés:

- Ne kelljen elemenként egyenletrendszert megoldani.
- Ne kelljen koordináta transzformációt elvégezni.
- Legyen egyszerű az integrálás.

Az izoparametrikus elemek jellemzői:

- Az elemhatár lehet görbe vonal, vagy görbült felület is.
- Az elem geometriájának leírását leképezéssel végezzük el - az elemhez illeszkedő „természetes" ξ, η, ζ koordináta-rendszert veszünk fel.

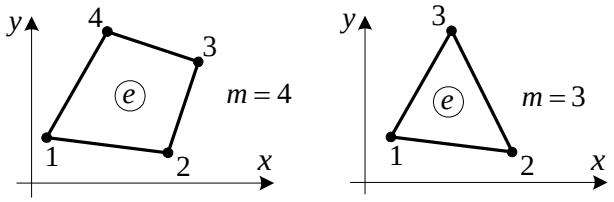
[2] Charles Hermite (1822-1901) francia matematikus.

- Az elmozdulásmezőket elemenként a globális x, y, z koordináta-renszerben közelítjük.
- Az elmozdulásmezők közelítésére a leképezésnél használt függvényeket alkalmazzuk.
- A közelítő függvényekben közvetlenül a globális koordináta-rendszerben vett csomóponti paraméterek jelennek meg.
- Az integrálást a „természetes” ξ, η, ζ változók szerint végezzük el egy kocka/négyzet tartományra.
- Az integrálást nem zárt alakban, hanem numerikusan végezzük el.

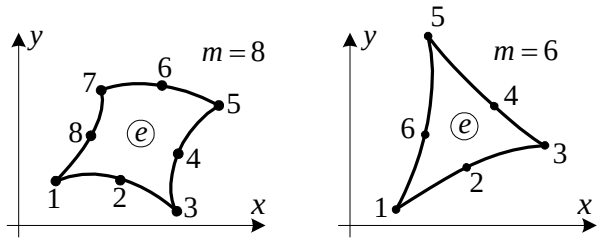
5.5. Lineáris és kvadratikus végeselemek 2D (SA, ÁSF, FSZ) feladatok megoldására

a) Sík (SA, ÁSF) elemek:

Lineáris elemek:

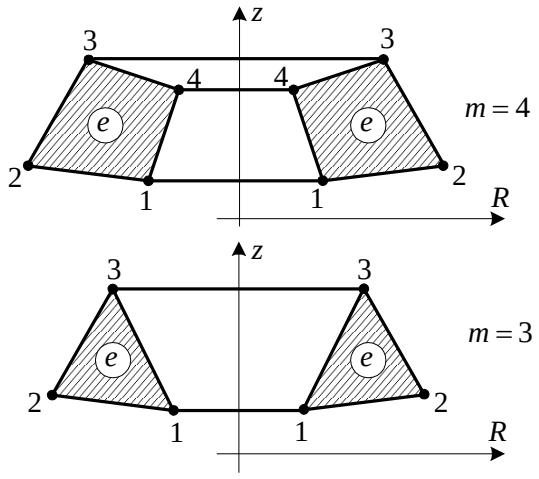


Kvadratikus elemek:

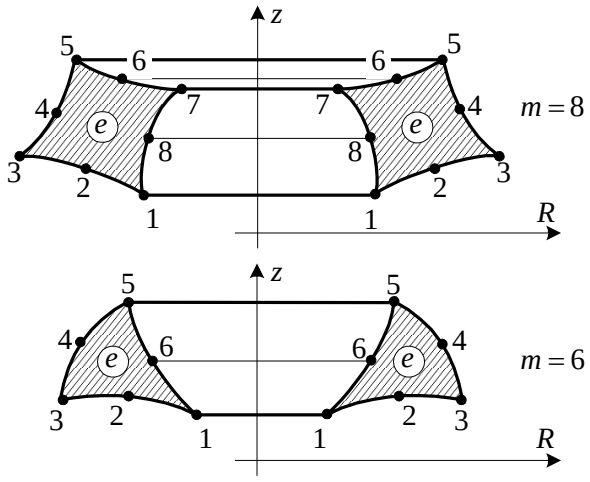


b) Forgásszimmetrikus (gyűrű) elemek:

Lineáris elemek:



Kvadratikus elemek:



Gyűrűelemeknél a csomópontot szokás csomókörnek is nevezni.

c) A geometria leírása:

Sík-alakváltozás (SA), általánosított sík-feszültségi állapot (ÁSF):

$$\left.\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)\,x_i, \\ y(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)\,y_i. \end{aligned}\right\}$$

Forgásszimmetrikus (tengelyszimmetrikus) (FSZ) feladat:

$$\left.\begin{aligned} R(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)\,R_i, \\ z(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)\,z_i. \end{aligned}\right\}$$

d) Az elmozdulásmező:

SA, ÁSF: $\vec{u}(x,y) = u(x,y)\vec{e}_x + v(x,y)\vec{e}_y$, FSZ: $\vec{u}(R,z) = u(R,z)\vec{e}_R + v(R,z)\vec{e}_z$.

- Az elmozdulásmező közelítése:

$$\left.\begin{aligned} u^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i^e(\xi,\eta)\,u_i^e, \\ v^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i^e(\xi,\eta)\,v_i^e. \end{aligned}\right\}$$

Az elmozdulásmezőt ugyanazokkal a függvényekkel közelítjük, mint a geometriát.

A közelítés mátrix alakban: $\underset{(2\times1)}{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\eta)} = \underset{(2\times 2m)}{\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)}\ \underset{(2m\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}$.

Az elem approximációs mátrixa: $\left[\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\right] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & \dots & h_m & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & \dots & 0 & h_m \end{bmatrix}^e$.

Az elem csomóponti/csomóköri elmozdulásvektora:

$$\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T = \left[u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_m \quad v_m\right]^e, \text{ ahol}$$

u_i^e - az i csomópont x/R irányú elmozdulása,

v_i^e - az i csomópont y/z irányú elmozdulása.

- A monoton konvergencia 2. kritériuma (a teljesség feltétele):

Az elmozdulásmezőnek tartalmaznia kell egy teljes lineáris polinomot:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y, \\ v(x,y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y. \end{aligned}\right\}$$

Ebből az elmozdulásmezőből számított csomóponti (csomóköri) elmozdulások:

$$u_i = u(x_i,y_i) = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i,\ v_i = v(x_i,y_i) = b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i.$$

Ezeket behelyettesítve az elmozdulásmező izoparametrikus közelítésébe:

$$u(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)\,u_i = a_1 \underbrace{\sum_i h_i}_{=1} + a_2 \underbrace{\sum_i h_i x_i}_{=x} + a_3 \underbrace{\sum_i h_i y_i}_{=y},$$

$$v(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)\,v_i = b_1 \underbrace{\sum_i h_i}_{=1} + b_2 \underbrace{\sum_i h_i x_i}_{=x} + b_3 \underbrace{\sum_i h_i y_i}_{=y}.$$

Tehát a $h_i(\xi,\eta)$ alak/approximációs függvényeknek ki kell elégíteni az alábbi feltételt is:

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)=1 \qquad (-1\le\xi,\eta\le 1).$$

e) Az elem alakváltozási jellemzői:

SA, ÁSF:
$$\underset{(3\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\eta)}=\underset{(3\times2)}{\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e}\,\underset{(2\times1)}{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\eta)}=\underbrace{\left[\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\right]}_{\underset{(3\times2m)}{\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)}}\underset{(2m\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}\ .$$

Részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}u^e(\xi,\eta)\\ v^e(\xi,\eta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial h_m}{\partial y}\\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y} & \frac{\partial h_m}{\partial x}\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ \vdots\\ u_m\\ v_m\end{bmatrix}^e.$$

FSZ:
$$\underset{(4\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\eta)}=\underset{(4\times2)}{\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e}\,\underset{(2\times1)}{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\eta)}=\underbrace{\left[\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\right]}_{\underset{(4\times2m)}{\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)}}\underset{(2m\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}\ .$$

Részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_R\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\varphi\\ \gamma_{Rz}\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial R} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{1}{R} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^e(\xi,\eta)\\ v^e(\xi,\eta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial R} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial R} & 0 & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial R} & 0\\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial h_m}{\partial z}\\ \frac{h_1}{R} & 0 & \frac{h_2}{R} & 0 & \dots & \frac{h_m}{R} & 0\\ \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial R} & \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial R} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial z} & \frac{\partial h_m}{\partial R}\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ \vdots\\ u_m\\ v_m\end{bmatrix}^e.$$

A $\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)$ mátrixok előállításánál az a probléma, hogy a $h_i(\xi,\eta)$ függvények nem azoknak az xy/Rz változóknak a függvényei, amik szerint deriválni kell.

f) A Jacobi-féle függvénymátrix bevezetése:

Legyen $f=f(x,y)=f\left[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\right]$.

Állítsuk elő az f függvény ξ,η és x,y változók szerinti deriváltjai közötti kapcsolatot:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\xi}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},\\ \frac{\partial f}{\partial\eta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}.\end{aligned}\right\}.$$

Mátrix alakban:
$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial\xi}\\ \frac{\partial f}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}(\xi,\eta)}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=\left[\underline{\underline{J}}(\xi,\eta)\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}.$$

$\underline{\underline{J}}(\xi,\eta)$ a Jacobi-féle mátrix.

A Jacobi-féle mátrix kiszámítása (előállítása):

SA, ÁSF:
$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}.$$

FSZ:
$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial R}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} R_i & \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} R_i & \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási jellemzők kiszámításához a $h_i(\xi,\eta)$ függvények x/R és y/z szerinti deriváltjait kell előállítani (az inverz Jacobi mátrixra van szükség):

SA, ÁSF:
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\left|\underline{\underline{J}}\right|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

FSZ:
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial R} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\left|\underline{\underline{J}}\right|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial R}{\partial \eta} & \dfrac{\partial R}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy az inverz Jacobi mátrixot is elő tudjuk állítani az $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$, illetve $R = R(\xi,\eta), z = z(\xi,\eta)$ függvények ismeretében.

g) Az elem feszültségei:

SA, ÁSF:
$$\underset{(3\times1)}{\underline{\underline{\sigma}}^e(\xi,\eta)} = \underset{(3\times3)}{\underline{\underline{C}}^e} \underset{(3\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\eta)}.$$

Részletesen kiírva:
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^e.$$

Az anyagállandók mátrixának elemei:

SA: $c_1 = E\dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}$, $\quad c_2 = E\dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G\dfrac{\nu}{1-2\nu}$, $\quad c_3 = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = G.$

ÁSF: $c_1 = E\dfrac{1}{1-\nu^2} = 2G\dfrac{1}{1-\nu}$, $\quad c_2 = E\dfrac{\nu}{1-\nu^2} = 2G\dfrac{\nu}{1-\nu}$, $\quad c_3 = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = G.$

FSZ:
$$\underset{(4\times1)}{\underline{\underline{\sigma}}^e(\xi,\eta)} = \underset{(4\times4)}{\underline{\underline{C}}^e} \underset{(4\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\eta)}.$$

Részletesen kiírva:
$$\begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_z \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{Rz} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{Rz} \end{bmatrix}^e.$$

Az anyagállandók mátrixának elemei:

$c_1 = E\dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}$, $\quad c_2 = E\dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2G\dfrac{\nu}{1-2\nu}$, $\quad c_3 = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = G.$

h) Az elem xy / Rz KR-ben vett merevségi mátrixa:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(V^e)} \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)\right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)\,dV.$$

Az elemi térfogat: SA: $dV = 1\,dxdy = 1\det\left|\underline{\underline{J}}\right| d\xi d\eta,$

ÁSF: $dV = bdxdy = b\det\left|\underline{\underline{J}}\right| d\xi d\eta,$

FSZ: $dV = 2R\pi dRdz = 2R\pi\det\left|\underline{\underline{J}}\right| d\xi d\eta.$

Az előző három sort általánosan írva: $dV = c(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$

Az elem xy / Rz KR-ben vett merevségi mátrtixának kiszámítása:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{\eta=-1}^{1}\int_{\xi=-1}^{1} \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)\right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)\,c(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Az integrációs tartomány alakja négyzet!
Az integrandusz bonyolultsága miatt numerikus integrálást alkalmazunk:

$$\underline{\underline{K}}^e = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi_i,\eta_j)\right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi_i,\eta_j)\,c(\xi_i,\eta_j), \text{ ahol}$$

n - integrációs pontok (talppontok) száma,
ξ_i, η_j - az integrációs pontok helykoordinátái,
w_i, w_j - integrációs súlytényezők.

i) Az elem xy / Rz KR-ben vett terhelési vektorai:

- A térfogaton megoszló terhelésből:

$$\underset{(2m\times 1)}{\underline{\underline{f}}^e_q} = \int_{(V^e)} \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\right]^T \underline{\underline{q}}(\xi,\eta)\,dV = \int_{\eta=-1}^{1}\int_{\xi=-1}^{1} \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)\right]^T \underline{\underline{q}}(\xi,\eta)\,c(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Numerikus integrálás: $$\underline{\underline{f}}^e_q = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi_i,\eta_j)\right]^T \underline{\underline{q}}(\xi_i,\eta_j)\,c(\xi_i,\eta_j).$$

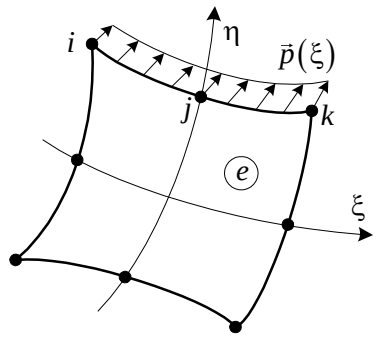
Példa: a forgásszimmetrikus test z tengely körüli forgása.

A térfogati terhelés sűrűségvektora: $\underline{\underline{q}}(R,z) = \rho\omega^2 \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$, ahol

ρ - az anyag tömegsűrűsége, ω - a test (alkatrész) szögsebessége.
A forgásból származó csomóponti terhelésvektor:

$$\underline{\underline{f}}^e_q = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j\, 2\pi\rho\omega^2 \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi_i,\eta_j)\right]^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} R^2(\xi_i,\eta_j)\det\left|\underline{\underline{J}}\right|.$$

- A felületen megoszló terhelésből:



Az $\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta)$ approximációs mátrixot lokalizálni kell arra az oldalra, ahol a $\vec{p}(\xi)$ terhelés hat.

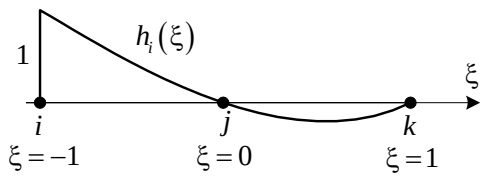
Az $\eta=1$ oldal mentén minden csak a ξ változótól függ: $\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta) \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{e0}(\xi)$.

$$\left.\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} h_i(\xi) u_i, \\ v(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} h_i(\xi) v_i. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{(2\times1)}{\underline{\underline{u}}^e(\xi)} = \underset{(2\times6)}{\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi)} \underset{(6\times1)}{\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \\ \underline{\underline{q}}_k^e \end{bmatrix}}.$$

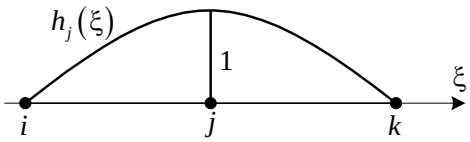
A lokalizált approximációs mátrix: $\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi) = \begin{bmatrix} h_i & 0 & h_j & 0 & h_k & 0 \\ 0 & h_i & 0 & h_j & 0 & h_k \end{bmatrix}^e$.

Az alakfüggvények:

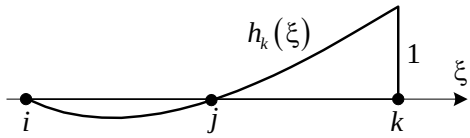
$$h_i(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi),$$



$$h_j(\xi) = \left(1-\xi^2\right),$$



$$h_k(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1+\xi).$$



Csomóponti terhelésvektor az oldal mentén megoszló terhelésből:

$$\underset{\underline{\underline{f}}_p^e}{} = \int_{\left(A_0^e\right)} \left[\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi)\right]^T \underline{\underline{p}}(\xi)\, dA, \text{ ahol } \underline{\underline{p}}(\xi) = \begin{bmatrix} p_x(\xi) \\ p_y(\xi) \end{bmatrix}, \text{ vagy } \begin{bmatrix} p_R(\xi) \\ p_z(\xi) \end{bmatrix}.$$

Az elemi felület:

SA: $$dA = 1ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}\, d\xi,$$

ÁSF: $$dA = bds = b\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}\, d\xi,$$

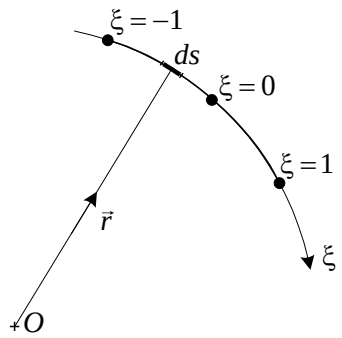
FSZ: $$dA = 2R\pi ds = 2R\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}\, d\xi.$$

Az elemi ívhossz:

$$\frac{ds}{d\xi} = \left|\frac{d\vec{r}}{d\xi}\right| = \left|\frac{dx}{d\xi}\vec{e}_x + \frac{dy}{d\xi}\vec{e}_y\right|,$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}\, d\xi.$$

Általánosan: $ds = c^*(\xi)\, d\xi$.

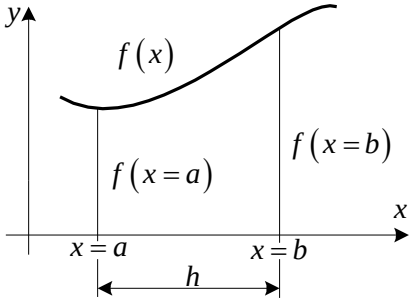


A csomóponti terhelésvektor kiszámítása:

$$\underline{\underline{f}}_p^e = \int_{\xi=-1}^{1} \left[\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi)\right]^T \underline{\underline{p}}(\xi) c^* d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[\underline{\underline{A}}^{e0}(\xi_i)\right]^T \underline{\underline{p}}(\xi_i) c^*(\xi_i).$$

5.6. Numerikus integrálás

Az $f(x)$ függvény integrálja numerikusan közelítőleg összeg alakjában állítható elő.
Az összeg minden tagja egy integrálási súlytényező és egy függvényérték szorzata.



$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + \underset{\text{hiba}}{R_n}.$$

w_i - az i jelű integrációs ponthoz tartozó súlytényező,
x_i - az i jelű integrációs pont helykoordinátája.

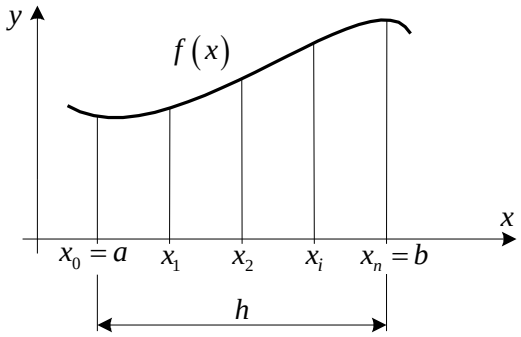
Feladat: A w_i és x_i értékek meghatározása.

a) A Newton-Cotes[3] (kots) formulák

Vegyük fel az integrációs pontokat az integrációs tartományon egymástól egyenlő távolságra:

$$x_i = x_0 + \frac{b-a}{n} i.$$

Helyettesítsük az $f(x)$ függvényt egy *Lagrange*-interpolációval előállított függvénnyel:



$$f(x) \approx \eta(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i).$$

$f(x_i)$ - a függvény helyettesítési értéke az $x = x_i$ helyen,

A *Lagrange*-féle interpolációs polinomok:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Helyettesítsük be a közelítő függvényt: $$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{x=a}^{b} \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) dx + R_n.$$

Átalakítások: $$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \left[\int_{x=a}^{b} L_i(x)dx\right] f(x_i) + R_n,$$

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} c_i^n f(x_i) + R_n.$$

A *Newton-Cotes*-féle integrálási együtthatók (integrálási súlytényezők) a fenti két összefüggésből az $f(x_i)$ tényezők együtthatóinak összevetéséből adódnak:

[3] Roger Cotes (1682-1716) angol matematikus.

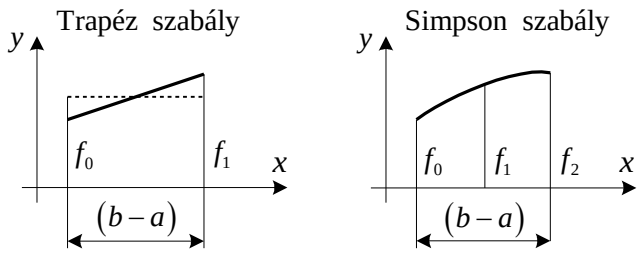
n	c_0^n	c_1^n	c_2^n	c_3^n	c_4^n	R_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$10^{-1}(b-a)^3 f''(x)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$10^{-1}(b-a)^5 f^{IV}(x)$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$10^{-1}(b-a)^7 f^{VI}(x)$

Az $n=3$ esetén ugyanakkora a hiba, mint $n=2$-nél és $n=5$ esetén is ugyanakkora a hiba, mint $n=4$-nél, ezért az $n=3$, $n=5$ formulákat nem szokták használni.

Speciális esetek:

$n=1 \quad \Rightarrow \quad$ Trapéz formula (szabály) : $\int_a^b f(x) \cong (b-a)\frac{1}{2}(f_0+f_1)$,

$n=2 \quad \Rightarrow \quad$ *Simpson*[4] (szimpszon) formula: $\int_a^b f(x) \cong \frac{b-a}{6}(f_0+4f_1+f_2)$.



b) A Gauss-kvadratúrák

Az integrálási pontokat egymástól nem egyenlő távolságra, hanem optimális távolságra vesszük fel. Ettől az integrálás pontosságának javulását várjuk.

A közelítő függvény az előző esetben: $f(x) \approx \eta(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$.

Itt az x_i helyeket is ismeretlennek tekintjük. (Az előző esetben az x_i helyek ismertek voltak.)

Vegyünk fel polinomot gyöktényezős alakban: $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

Ez a polinom az x_i helyen $P(x_i)=0$ értéket vesz fel.

Vegyük fel a közelítő függvényt itt az alábbi alakban:

$$f(x) \approx \eta(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i) + P(x)\left(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n\right).$$

Itt egy olyan közelítő polinomot vettünk fel az n pontra, amelynek rendje $2n-1$.

Az előző gondolatmenet alapján: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\int_a^b L_i(x)dx\right]}_{w_i} f(x_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left[\int_a^b x^j P(x)dx\right]$.

Optimálási feltétel: a második szumma tűnjön el.

$$\int_{x=a}^{b} x^k P(x)dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n-1.$$

$$\Downarrow$$

$x_k = \ldots$ optimális integrálási pontok.

[4] Thomas Simpson (1710-1761) angol matematikus.

A w_i integrálási súlyok függenek az $[a,b]$ intervallum nagyságától.

Ha $a=-1$ és $b=1$ akkor a *Gauss*-féle integrálási pontok és integrálási együtthatók:

n	x_i	w_i
1	$0,0000000000$	$0,0000000000$
2	$\pm 0,5773502691$	$1,0000000000$
3	$\pm 0,774596692$	$0,5555555556$
	$0,0000000000$	$0,8888888889$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Megjegyzések:

- Az n integrálási pontú *Gauss* formula legfeljebb $(2n-1)$-ed fokú polinomig bezárólag adja meg az integrál pontos értékét.
- Azonos számú integrálási pont esetén a Gauss-formula pontosabb eredményt szolgáltat, mint a Newton-Cotes.
- Javasolt integrálási fokszámok 2D feladatoknál:

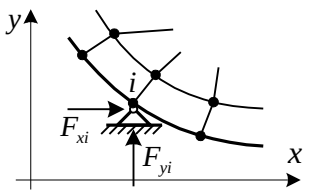
Csomópontok száma	Integrálás fokszáma
$m=4,3$	2×2
$m=8,6$	3×3

5.7. Kiegészítő megjegyzések 2D feladatokhoz

a) Peremfeltételek figyelembevétele 2D feladatoknál

- Csuklós megfogás egy pontban

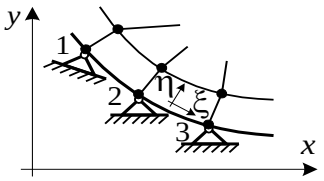
  $u_i=0, v_i=0 \quad \Rightarrow$ az i jelű csomópontban koncentrált támasztóerő lép fel.



- Csuklós megfogás több egymás melletti pontban $u_i=0, v_i=0$, $i=1,2,3,\ldots$.

  Az elmozdulásmező a peremen:

$$\left.\begin{aligned} u(\xi,\eta=-1)&=\sum_i h_i(\xi)u_i,\\ v(\xi,\eta=-1)&=\sum_i h_i(\xi)v_i.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u&\equiv 0,\\ v&\equiv 0.\end{aligned}$$

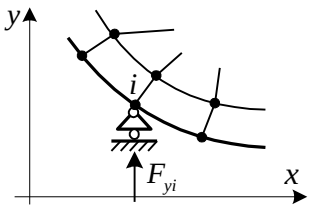


  Nemcsak a csomópontokban, hanem a csomópontok közötti peremszakasz minden pontjában nulla lesz az elmozdulás.

  Az ilyen megtámasztás a peremgörbe merev megfogását eredményezi. Ez a valóságban ritkán fordul elő, ezért ez a megtámasztási mód kerülendő

- Görgős megfogás egy pontban

  $v_i=0 \quad \Rightarrow$ az i pontbeli koncentrált támasztóerőnek csak y koordinátája lesz.

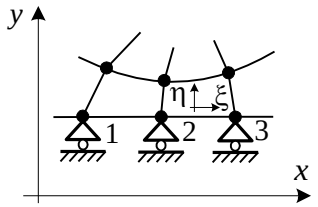


- Görgős megtámasztás egyenesen lévő több, egymás melletti csomópontban

  $v_i=0, \quad i=1,2,3,\ldots$.

  $v^e(\xi,\eta=-1)=\sum_i h_i(\xi)v_i \quad \Rightarrow \quad v\equiv 0.$

  A perem egyenes marad.



b) Lineáris feladatok terhelési esetei

Lineáris problémák esetén az egyes terhelésekhez tartozó megoldások (szilárdsági állapotok) szuperponálhatók.

Lineáris feladat: pl. lineáris rugalmassági feladat.

Ha ugyanarra az alkatrészre (azonos végeselem hálózat esetén) különböző terhelések hatnak, akkor az alábbi egyenletrendszereket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}_1 &= \underline{\underline{f}}_1 , \\ \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}_2 &= \underline{\underline{f}}_2 , \\ &\vdots \\ \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}_n &= \underline{\underline{f}}_n . \end{aligned}\right\} \qquad \text{Elnevezés: } \underline{\underline{f}}_1 , \underline{\underline{f}}_2 \ldots \underline{\underline{f}}_n \text{ – terhelési esetek.}$$

Átrendezés: $$\underline{\underline{K}}\left[\underline{\underline{q}}_1 \underline{\underline{q}}_2 \ldots \underline{\underline{q}}_n\right] = \left[\underline{\underline{f}}_1 \underline{\underline{f}}_2 \ldots \underline{\underline{f}}_n\right]$$

Megoldás: $$\left[\underline{\underline{q}}_1 \underline{\underline{q}}_2 \ldots \underline{\underline{q}}_n\right] = \underline{\underline{K}}^{-1}\left[\underline{\underline{f}}_1 \underline{\underline{f}}_2 \ldots \underline{\underline{f}}_n\right]$$

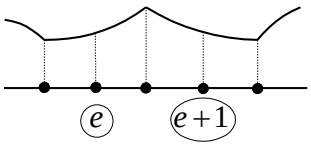
Lineáris feladatoknál egy programfutásban egyszerre több terhelési eset is kiszámítható.

Az $\underline{\underline{f}}_i$ terhelési esetek tetszőleges $\left(c_1 \underline{\underline{f}}_1 + c_2 \underline{\underline{f}}_2 + \ldots + c_n \underline{\underline{f}}_n\right)$ lineáris kombinációjához tartozó megoldás (szuperpozíció): $\underline{\underline{q}} = c_1 \underline{\underline{q}}_1 + c_2 \underline{\underline{q}}_2 + \ldots + c_n \underline{\underline{q}}_n$, ahol $c_1, c_2, \ldots c_n$ skaláris együtthatók.

c) Optimális feszültségszámítás kvadratikus izoparametrikus elemeknél

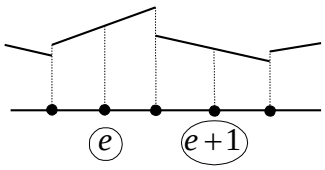
A közelítés jellege:

- Az elmozdulások másodfokú polinomok.



- A feszültségek lineáris polinomok (deriválás).

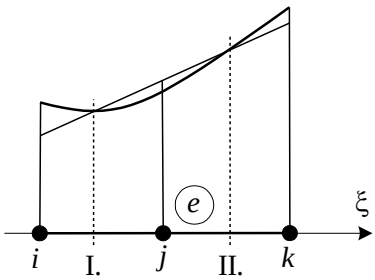
  A deriválás következtében a feszültségek egy nagyságrenddel nagyobb hibával terheltek, mint az elmozdulások.

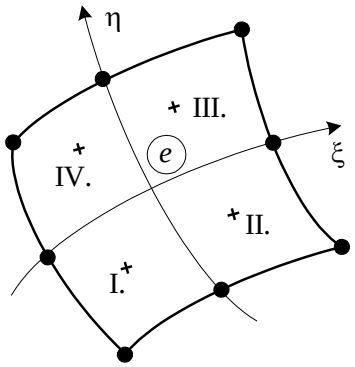


Célkitűzés: olyan feszültség értékek meghatározása, amelyek pontossága az elmozdulások pontosságával azonos nagyságrendű.

A megoldás gondolatmenete:

- Az elmozdulásmezőt kétféleképpen közelítjük: teljes másodfokú és teljes harmadfokú polinommal.
- Keressük azokat a pontokat, ahol a kétféle közíltésből származó feszültségek megegyeznek.
- Ezek a pontok a 2×2-es Gauss kvadratúra integrációs pontjai.





Az I., II., III. és IV. *Gauss* integrációs pontokban számított feszültségek hibájának nagyságrendje olyan, mintha harmadfokú közelítést alkalmaztunk volna.

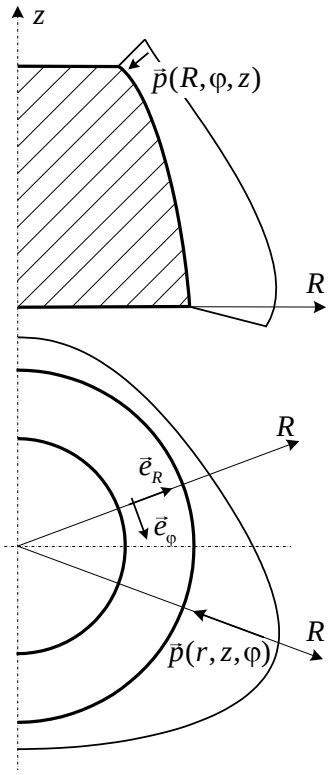
Kvadratikus izoparametrikus elemeknél a (csomóponti) elmozdulások és a 2×2-es *Gauss* integrációs pontokban számított feszültségek pontossága azonos nagyságrendű.

5.8. Tengelyszimmetrikus geometriájú, nem tengelyszimmetrikus terhelésű testek feladata

A geometria forgásszimmetrikus. A terhelésnek nincs $\vec{e}_\varphi$ irányú koordinátája, de függhet a φ-től.

Felületi terhelés: $\vec{p} = p_R(R,z,\varphi)\vec{e}_R + p_z(R,z,\varphi)\vec{e}_z.$

Térfogati terhelés: $\vec{q} = q_R(R,z,\varphi)\vec{e}_R + p_z(R,z,\varphi)\vec{e}_z.$



A terhelést φ szerint trigonometrikus sorba fejtjük $\Rightarrow$ a φ-től való függést külön választjuk:

Felületi terhelés:
$$\left.\begin{aligned} p_R &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{R_n}(R,z)\cos n\varphi, \\ p_z &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{z_n}(R,z)\cos n\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Térfogati terhelés:
$$\left.\begin{aligned} q_R &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{R_n}(R,z)\cos n\varphi, \\ q_z &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{z_n}(R,z)\cos n\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Az elmozdulásmező koordinátái: $\vec{u}(R,z,\varphi) = u(R,z,\varphi)\vec{e}_R + v(R,z,\varphi)\vec{e}_\varphi.$

A φ-től való függést különválasztjuk:
$$\left.\begin{aligned} u(R,z,\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(R,z)\cos n\varphi, \\ v(R,z,\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(R,z)\cos n\varphi. \end{aligned}\right\}$$

A φ-től való függés leválasztásával a feladatot n darab tengelyszimmetrikus terhelésű feladatra vezettük vissza.

Az elmozdulásmezők amplitúdóinak izoparametrikus közelítése:

$$\left.\begin{aligned} u_n(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)u_{ni} \\ v_n(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{m} h_i(\xi,\eta)v_{ni} \end{aligned}\right\} \quad m = 3, 4, 6, 8\,.$$

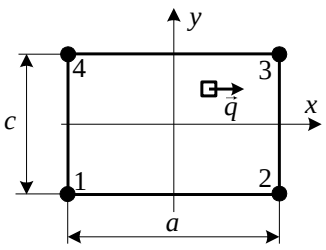
5.9 Példák

1. példa: Négyszög elem csomóponti terhelésvektorának előállítása

- *Lineáris elem (ÁSF)*

  Adott: $a,\ b,\ c,\ \ \vec{q} = q_x\vec{e}_x = \text{áll.},$

  b az elem vastagsági mérete.



Feladat: a csomóponti terhelésvektor meghatározása.

Eredő erő: $F = q_x V = q_x acb.$

Leképezés: $\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\xi \\ y &= \frac{c}{2}\eta \end{aligned}\right\}$, $\qquad \left[\underline{\underline{J}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} \end{bmatrix}$, $\qquad \det\left|\underline{\underline{J}}\right| = \frac{ac}{4}$.

A térfogati terhelésből származó csomóponti terhelésvektor:

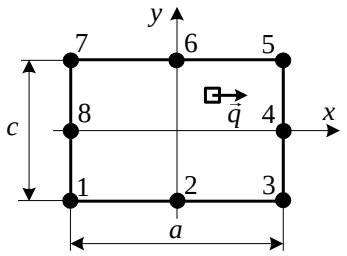
$$\left(\underline{\underline{f}}_q^e\right)^T = \left[\, f_{1x} \quad 0 \quad f_{2x} \quad 0 \quad f_{3x} \quad 0 \quad f_{4x} \quad 0 \,\right], \qquad f_{ix}^e = q_x \underbrace{\int_{\eta=-1}^{1}\int_{\xi=-1}^{1} h_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}_{=1}\, b\frac{ac}{4} = \frac{F}{4}.$$

A lineáris approximáció az állandó terhelést egyenletesen osztja szét a csomópontokra.

- *Kvadratikus elem (ÁSF)*

Adott: $a,\ b,\ c,\ \ \vec{q} = q_x\vec{e}_x = \text{áll.}$,

b az elem vastagsági mérete.



Feladat: a csomóponti terhelésvektor meghatározása.

$$\det\left|\underline{\underline{J}}\right| = \frac{ac}{4}.$$

$$\left(\underline{\underline{f}}_q^e\right)^T = \left[\, f_{1x} \quad 0 \quad f_{2x} \quad \dots \quad f_{8x} \quad 0 \,\right]^e, \qquad f_{ix} = q_x \frac{abc}{4}\int_{\eta=-1}^{1}\int_{\xi=-1}^{1} h_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

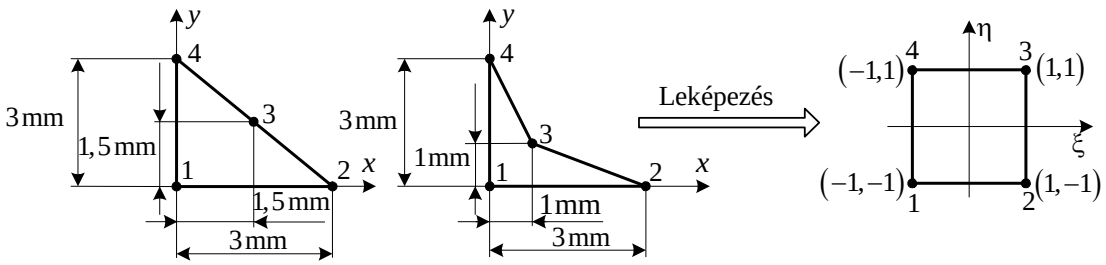
Az alakfüggvény integrálja:

$$\int_{\eta=-1}^{1}\int_{\xi=-1}^{1} h_i(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = \begin{cases} -\frac{1}{3} & (i = 1,3,5,7), \\ \frac{4}{3} & (i = 2,4,6,8). \end{cases} \qquad f_{ix} = \begin{cases} -q_x\frac{abc}{12} = -\frac{F}{12}, & \text{ha} \quad i = 1,3,5,7, \\ q_x\frac{abc}{3} = \frac{F}{3}, & \text{ha} \quad \text{i=2,4,6,8.} \end{cases}$$

Eredő erő (ellenőrzés): $\quad \sum_i f_{ix} = -4\frac{F}{12} + 4\frac{F}{3} = F.$

A megoszló erőrendszert a csomópontokban helyettesítő erők az eredeti terheléssel statikailag egyenértékűek (ugyanazt a nyomatéki teret hozzák létre).

2. példa: 2D lineáris leképezés Jacobi determinánsa



Vizsgáljuk meg, hogy négy csomópontú, lineáris elem esetén kölcsönösen egyértelmű-e a leképezés az alábbi esetekben:

a) Ha három csomópont egy egyenesen van.
b) Ha az elem az ábrán látható konkáv alakú.

A leképezés alakfüggvényei: $\quad h_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad h_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$

$$h_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),\qquad h_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

Az a) eset vizsgálata: három csomópont egy egyenesre esik.

A geometria leképezése:

$$x=\sum_{i=1}^{4}h_i(\xi,\eta)x_i=0+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)3+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)1{,}5+0,$$

$$y=\sum_{i=1}^{4}h_i(\xi,\eta)y_i=0+0+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)1{,}5+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)3.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve: $x=\frac{3}{8}(1+\xi)(3-\eta),\qquad y=\frac{3}{8}(1+\eta)(3-\xi).$

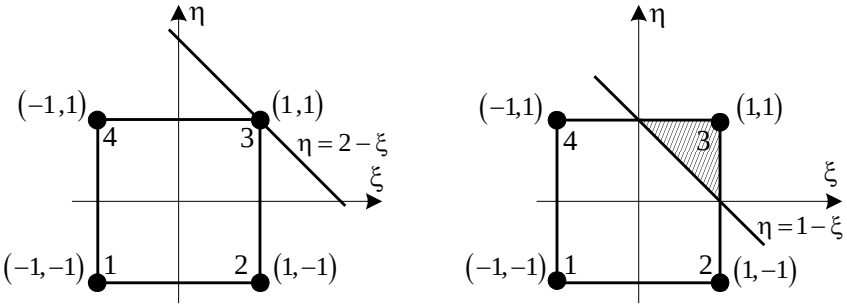
A leképezés Jacobi mátrixa:

$$\underline{\underline{J}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}(3-\eta) & -\frac{3}{8}(1+\eta)\\ -\frac{3}{8}(1+\xi) & \frac{3}{8}(3-\xi)\end{bmatrix}.$$

A Jacobi mátrix determinánsa: $\det\left|\underline{\underline{J}}\right|=\frac{9}{64}(3-\xi)(3-\eta)-\frac{9}{64}(1+\xi)(1+\eta)=\frac{9}{16}(2-\xi-\eta).$

A leképezés akkor elfajuló, ha $\det\left|\underline{\underline{J}}\right|\le 0 \;\Rightarrow\; 2-\xi-\eta\le 0 \;\Rightarrow\; \eta\ge 2-\xi.$

Ez azt jelenti, hogy a leképezés a bal oldali ábra egy pontjában, a 3 jelű csomópontban elfajuló.



A b) eset vizsgálata: konkáv elem alak

A geometria leképezése:

$$x=\sum_{i=1}^{4}h_i(\xi,\eta)x_i=0+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)3+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)1+0,$$

$$y=\sum_{i=1}^{4}h_i(\xi,\eta)y_i=0+0+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)1+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)3.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve: $x=(1+\xi)\left(1-\frac{\eta}{2}\right),\qquad y=(1+\eta)\left(1-\frac{\xi}{2}\right).$

A leképezés Jacobi mátrixa:

$$\underline{\underline{J}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(1-\frac{\eta}{2}\right) & -\frac{1}{2}(1+\eta)\\ -\frac{1}{2}(1+\xi) & \left(1-\frac{\xi}{2}\right)\end{bmatrix}.$$

$$\det\left|\underline{\underline{J}}\right|=\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\left(1-\frac{\xi}{2}\right)-\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)=\frac{3}{4}(1-\xi-\eta).$$

A leképezés akkor elfajuló, ha $\det\left|\underline{\underline{J}}\right|\le 0 \;\Rightarrow\; 1-\xi-\eta\le 0 \;\Rightarrow\; \eta\ge 1-\xi.$

Ez azt jelenti, hogy a leképezés a sraffozott tartományon elfajuló.

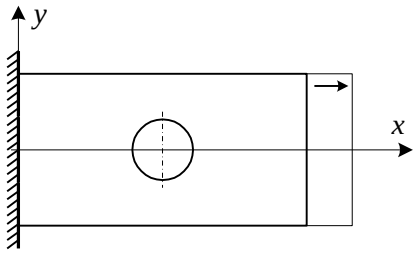
Megjegyzés: A végeselem felosztásban ilyen elemek nem szerepelhetnek, mert ebben az esetben hibás számítási eredményeket kapunk.

3. példa: 2D feladat végeselem megoldása

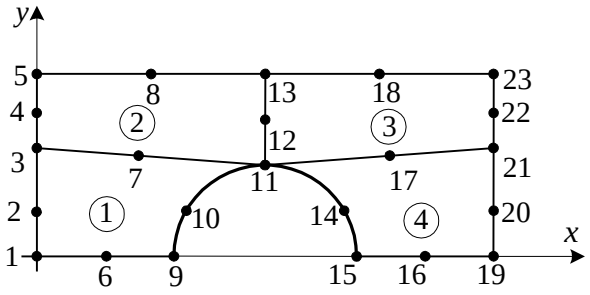
Adott: a furatos tárcsa geometriája, anyaga, terhelése.

Feladat: egy lehetséges végeselem modell előállítása.

Az x tengely a geometria, a terhelés és a megtámasztás szempontjából is szimmetriatengely.



Egy lehetséges végeselem felosztás:



A szerkezet merevségi mátrixa:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} & \underline{\underline{K}}_{13} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{16} & \underline{\underline{K}}_{17} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{19} & \dots \\ & \underline{\underline{K}}_{22} & \underline{\underline{K}}_{23} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{26} & \underline{\underline{K}}_{27} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{29} & \dots \\ & & \underline{\underline{K}}_{33} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{36} & \underline{\underline{K}}_{37} & \underline{\underline{K}}_{38} & \underline{\underline{K}}_{39} & \\ & & & \underline{\underline{K}}_{44} & \underline{\underline{K}}_{45} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{47} & \underline{\underline{K}}_{48} & \underline{\underline{0}} & \dots \\ & & \text{szimm.} & & \underline{\underline{K}}_{55} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{57} & \underline{\underline{K}}_{58} & \underline{\underline{0}} & \\ & & & & & \underline{\underline{K}}_{66} & \underline{\underline{K}}_{67} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{69} & \dots \\ & & \vdots & & & & & \dots & & \end{bmatrix}.$$

Példa néhány blokk felépítésére az elemi merevségi mátrixokból:

$$\underline{\underline{K}}_{33} = \underline{\underline{K}}^1_{33} + \underline{\underline{K}}^2_{33},$$
$$\underline{\underline{K}}_{37} = \underline{\underline{K}}^1_{37} + \underline{\underline{K}}^2_{37},$$
$$\underline{\underline{K}}_{11,11} = \underline{\underline{K}}^1_{11,11} + \underline{\underline{K}}^2_{11,11} + \underline{\underline{K}}^3_{11,11} + \underline{\underline{K}}^4_{11,11}.$$

A szerkezet csomóponti terhelésvektora:

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{f}}_{19} \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_{23} \end{bmatrix}.$$

Példa néhány blokk felépítésére az elemi csomóponti terhelésvektorokból:

$$\underline{\underline{f}}_{20} = \underline{\underline{f}}^3_{20},$$
$$\underline{\underline{f}}_{21} = \underline{\underline{f}}^3_{21} + \underline{\underline{f}}^4_{21}.$$

Peremfeltétel: Szimmetria: $v_1 = v_6 = v_9 = v_{15} = v_{16} = v_{19} = 0,$

Befogás: $u_1 = v_1 = 0$, $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0.$

A modell lehetséges finomítása: az 1, 2, 3, 4, 5 csomópontokban a peremfeltételek helyett y irányú rugók elhelyezése.